

# Die „adiabatische Invarianz“ des magnetischen Bahnmomentes geladener Teilchen

Von F. HERTWECK und A. SCHLÜTER

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen  
(Z. Naturforsch. 12 a, 844—849 [1957]; eingegangen am 11. Juni 1957)

In einem Magnetfeld ist das magnetische Bahnmoment  $\mu^*$  eines geladenen Teilchens annähernd eine Konstante der Bewegung, wenn das Magnetfeld nur schwach variiert. Für den Spezialfall eines homogenen, zeitabhängigen Magnetfeldes wird gezeigt, daß die relative Änderung in  $\mu^*$  zwischen zwei verschiedenen Zuständen, in denen das Magnetfeld konstant ist, mindestens exponentiell in  $h/\alpha$  gegen Null geht. Hierin ist  $\alpha$  ein Maß für die relative Feldänderungsgeschwindigkeit und mit  $h$  ist die Gyro-Frequenz bezeichnet.

The magnetic moment  $\mu$  of the motion of a charged particle in a magnetic field is an approximate constant of motion in moderately varying magnetic fields. For the special case of a homogeneous time-dependent magnetic field, it is shown that the relative change in  $\mu$  between two different states of constant field decreases at least exponentially in  $h/\alpha$  if  $\alpha/h$  tends to zero, where  $\alpha$  represents the relative rate of change of the magnetic field and  $h$  denotes the gyro-frequency.

In einem homogenen, zeitlich konstanten Magnetfeld (der Stärke  $H$ ) kann der Spiralbewegung geladener Teilchen ein magnetisches Moment zugeschrieben werden, das folgen würde, wenn man in Ebenen senkrecht zum Felde das geladene, kreisende Teilchen durch einen äquivalenten Kreisstrom ersetzt denkt. Die Größe dieses Momentes folgt zu

$$\mu^* = \frac{m v_{\perp}^2}{2 H},$$

wo  $v_{\perp}$  die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Felde bedeutet. Bis auf einen Faktor  $2 c m/e$  ist das magnetische Bahn-Moment identisch mit dem Drehimpuls des Teilchens um die von ihm umlauftene Feldlinie.

Der Nutzen dieses von ALFVÉN<sup>1</sup> eingeführten Begriffes des magnetischen Momentes liegt in dessen „adiabatischer“ Invarianz. ALFVÉN hat die Konstanz von  $\mu^*$  in langsam örtlich oder zeitlich sich ändernden Magnetfeldern in 1. Ordnung gezeigt, wenn die Ordnungen bei zeitlichen Änderungen durch Vergleich mit der Umlauffrequenz (Gyrofrequenz) und bei örtlichen Inhomogenitäten durch Vergleich mit dem während eines Umlaufes zurückgelegten Weges bestimmt werden. HELLWIG hat gezeigt<sup>2</sup>, daß die Konstanz bis zur 2. Ordnung gilt. Da es nun für viele Probleme erforderlich ist, ein Maß für die Güte der „adiabatischen“ Invarianz, also für die Änderung von  $\mu^*$  zu besitzen, da aber im allgemeinen Falle beliebiger örtlicher und zeitlicher Ände-

rungen die notwendigen Störungsrechnungen sehr unübersichtlich werden, wollen wir einen einfachen Spezialfall betrachten: das Magnetfeld sei dauernd homogen, aber mit zeitlich veränderlicher Stärke. Man wird annehmen dürfen, daß die hier erhaltenen Ergebnisse im wesentlichen auch im allgemeinen Fall zutreffen.

## 1. Die Bewegungsgleichung

Die allgemeine Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens (nicht-relativistisch) in einem elektromagnetischen Felde lautet:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = e \mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}].$$

Es soll nun nur der Fall betrachtet werden, daß das Magnetfeld homogen ist, sich aber zeitlich noch ändern kann, d. h. von der Gestalt

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}(t)$$

ist.  $\mathbf{n}$  ist ein fester Einheitsvektor;  $H(t)$ , der Betrag von  $\mathbf{H}(t)$ , ist eine Zeitfunktion. Unter der Annahme, daß keine Raumladungen vorhanden seien, bestimmt sich  $\mathbf{E}$  aus den beiden Gleichungen

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0.$$

Diese beiden Gleichungen werden durch die Funktion

<sup>1</sup> H. ALFVÉN, Cosmical Electrodynamics, Clarendon Press, Oxford 1950.

<sup>2</sup> G. HELLWIG, Z. Naturforsch. 10 a, 508 [1955].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{2c} [\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}] \frac{dH(t)}{dt}$$

gelöst. Mit der Umformung

$$h(t) = \frac{e H(t)}{m c},$$

wobei  $h(t)$  die Bedeutung der Gyrofrequenz des geladenen Teilchens im Magnetfeld  $\mathfrak{H}(t)$  hat, lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \left[ \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] h(t) + \frac{1}{2} [\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}] \frac{dh(t)}{dt} = 0.$$

Die Bewegung in Richtung von  $\mathbf{n}$  ist für das vorliegende Problem ohne Bedeutung, man kann willkürlich  $(\mathbf{n} \cdot d\mathbf{r}/dt) = 0$  setzen. Die beiden Querkomponenten von  $\mathbf{r}$  lassen sich dann auf die komplexe Zahlebene abbilden, und es folgt

$$\ddot{r} + i h \dot{r} + \frac{i}{2} h \dot{r} = 0, \quad (1)$$

mit  $r = x + i y$ .

Der Punkt bedeute im folgenden stets Differentiation nach der Zeit.

In Anlehnung an Gl. (1) möge das magnetische Moment hier so normiert werden, daß

$$\mu = \frac{\dot{r} \dot{r}}{h} = \frac{2c}{e} \mu^*.$$

Im Falle  $\dot{h} = 0$  beschreibt das Teilchen eine Kreisbahn

$$r = a_1 + \varrho e^{-i(h t + \psi)}$$

( $a_1 = \text{const. beliebig}$ ;  $\varrho, \psi = \text{const. reell}$ ).  $\varrho$  ist der Radius des Kreises. Es folgt dann offenbar

$$\mu = \frac{\dot{r} \dot{r}}{h} = h \varrho^2. \quad (2)$$

## 2. Die Lösungen der Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichung (1) geht durch die Transformation

$$r = z e^{-\frac{i}{2} \int h dt}$$

über in die Gleichung

$$\ddot{z} + \frac{h^2}{4} z = 0 \quad (3)$$

für  $z$ . Diese Form ist sehr zweckmäßig für die numerische Integration, da  $\Re(z)$  und  $\Im(z)$  der gleichen DGl. genügen. Die Transformation

$$z = e^{\int \gamma dt}$$

liefert die zu (3) gehörige Riccati-DGl.

$$\dot{\gamma} + \gamma^2 + \frac{h^2}{4} = 0. \quad (4)$$

Man kann nun den Reihenansatz  $\gamma = \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_r$  machen,

wobei in Analogie zur WBK-Methode der Quantenmechanik angenommen sein soll, daß die zunehmenden Indices von  $\gamma_r$  abnehmende Größenordnungen bedeuten und daß die zeitliche Differentiation die Ordnung um 1 erniedrigt. Durch Vergleich von Gliedern gleicher Ordnung folgt dann aus der DGl. (4) das rekursive System

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \pm i \frac{h}{2}, & \gamma_1 &= -\frac{1}{2} \frac{\dot{h}}{h}, \\ \gamma_2 &= -\frac{1}{2\gamma_0} (\dot{\gamma}_1 + \gamma_1^2), & \gamma_3 &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_0} \right), \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned} \quad (5)$$

Die ungeraden Glieder sind immer reell mit eindeutigem Vorzeichen und als Differentialquotienten darstellbar. Die geraden Glieder sind in diesem Fall imaginär. Das Vorzeichen von  $\gamma_0$  ist beliebig und beeinflußt die Vorzeichen der anderen geraden Glieder. Aus der Zerlegung der Gl. (4) in Real- und Imaginärteil folgt  $\int \Re(\gamma) dt = -\frac{1}{2} \log \Im(\gamma)$  und aus (5) erhält man  $\Im(\gamma) = \gamma_0 (1 + \gamma_2/\gamma_0 + \dots)$  mit reeller Klammer. Indem man für  $\gamma_0$  das positive oder negative Vorzeichen wählt, erhält man zwei linear unabhängige Lösungen:

$$z(t) = A \pm \frac{e^{\pm \frac{i}{2} \int h dt}}{h^{1/2}} \frac{e^{\pm i \int (\gamma_2 + \dots) dt}}{(1 + \gamma_2/\gamma_0 + \dots)^{1/2}}.$$

Die Reihenglieder  $\gamma_r$  für  $r \geq 2$  hängen nur von den Ableitungen  $\dot{h}, \ddot{h}, \dots$  ab, nicht aber von  $h$  selbst. Sie verschwinden für  $\dot{h} \equiv 0$ .

Für den Spezialfall, daß das Feld von einem konstanten Wert  $h_0$  zur Zeit  $t_0$  auf einen anderen konstanten Wert  $h_1$  zur Zeit  $t_1$  übergeht, so daß am Anfang und am Ende  $\dot{h}$  samt allen höheren Ableitungen gegen Null strebt, folgt

$$\frac{\dot{r}(t_1) \dot{r}(t_1)}{h_1} = A_- \bar{A}_+ = \frac{\dot{r}(t_0) \dot{r}(t_0)}{h_0},$$

da das Glied mit  $A_+$  zeitlich konstant wird. Das bedeutet, daß das magnetische Moment in allen Ordnungen konstant bleibt. Dieses physikalisch sinnlose Ergebnis muß bedeuten, daß die Reihenentwicklung nicht konvergiert.

### 3. Sprunghafte Feldänderungen

Das Feld soll sich in einer Zeit, die klein ist gegenüber einer Umlaufszeit des Teilchens, von einem konstanten Wert  $h_0$  (d. h.  $h \equiv h_0$  für  $t < t_0$ ) auf einen anderen konstanten Wert  $h_1$  ( $h \equiv h_1$  für  $t > t_1$ ) ändern. Die Integration der DGl. (1) liefert allgemein

$$\dot{r} + i h r - \frac{i}{2} \int_{t_0}^t \dot{h} r dt' = \text{const.} \quad (6)$$

Die anfängliche Feldkonstanz liefert als Anfangsbedingung,

$$r(t < t_0) = a + \varrho e^{-i h_0 t} = a + b$$

mit  $a, \varrho = \text{const.}$ , reell (die hierdurch festgelegte Phase ist ohne Belang). Es folgt  $\dot{r}(t < t_0) = -i h_0 \varrho$  und  $\text{const.} = i h_0 a$ , also

$$\dot{r}(t) = i h_0 a - i h r + \frac{i}{2} \int_{t_0}^t r \dot{h} dt'. \quad (7)$$

Im Grenzfall sprunghafter Feldänderungen läßt sich das Integral in (7) leicht berechnen, da  $r$  während der Feldänderung konstant bleibt [ $r(t_1) = r(t_0)$ ]:

$$\int_{t_0}^{t_1} r \dot{h} dt = r(t_0) \cdot (h_1 - h_0).$$

Einsetzen in (7) ergibt

$$\dot{r}(t_1) = -\frac{i}{2} [a(h_1 - h_0) + b(t_0)(h_1 + h_0)].$$

Schreibt man für  $\bar{a} b + a \bar{b} = 2 a \varrho \cos \varphi$ , wo  $\varphi$  der Winkel zwischen  $a$  und  $b$  zur Zeit der Feldänderung ist, so folgt für das magnetische Moment ( $\mu_0 = h_0 \varrho^2$ ,  $\varepsilon = a/\varrho$ ):

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{(h_1 + h_0)^2}{4 h_0 h_1} \left[ 1 + 2 \varepsilon \frac{h_1 - h_0}{h_1 + h_0} \cos \varphi + \varepsilon^2 \left( \frac{h_1 - h_0}{h_1 + h_0} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

### 4. Langsame Feldänderungen

Der andere, eigentlich interessante, Grenzfall ist die langsame Feldänderung. Während der Umlaufszeit soll sich das Feld nur wenig ändern, d. h.

$$h/h^2 \ll 1.$$

Ähnlich wie bei KOPPE<sup>3</sup> und SCHOCH<sup>4</sup> kann man als neue abhängige Veränderliche den relativen Unter-

schied von  $\gamma$  gegen  $\gamma_0$  einführen:

$$x = \frac{\gamma + \frac{i}{2} h}{\gamma - \frac{i}{2} h}; \quad \gamma = -i h \frac{1+x}{1-x}.$$

Die Riccati'sche DGl. (4) erhält dann die Form

$$\dot{x} - i h x + \frac{1}{2} \frac{\dot{h}}{h} (1 - x^2) = 0. \quad (9)$$

Auch diese Gleichung läßt sich nicht durch Quadratur lösen, doch wollen wir die Näherungslösungen bestimmen, die sich durch Vernachlässigung des quadratischen Gliedes in (9) ergeben. Gl. (9) geht dann in eine lineare inhomogene Gleichung für  $x$  über:

$$\dot{x} - i h x + \frac{1}{2} \frac{\dot{h}}{h} = 0. \quad (10)$$

In Abschnitt 5 wird sich zeigen, daß diese Annahme gerechtfertigt ist.

Anfangsbedingung sei ein Gebiet mit  $\dot{h} \equiv 0$ . Die allgemeine Lösung der DGl. (10) ist

$$x = -\frac{1}{2} e^{\frac{i}{2} \int_{t_0}^t h dt'} \int_{t_0}^t \left( \frac{\dot{h}}{h} \right)_{t'} e^{-\frac{i}{2} \int_{t_0}^{t'} h dt''} dt'. \quad (11)$$

Als zweite Lösung nehmen wir  $\bar{x}$ , so daß wir wieder zu zwei linear unabhängigen Lösungen für  $z$  (oder  $r$ ) gelangen, mit denen sich alle Anfangsbedingungen befriedigen lassen. Mit

$$\mathbf{p}(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left( \frac{\dot{h}}{h} \right)_{t'} e^{-\frac{i}{2} \int_{t_0}^{t'} h dt''} dt', \quad \mathbf{p}(t_0) = 0 \quad (12)$$

erhält man

$$x(t) = -\mathbf{p}(t) e^{\frac{i}{2} \int_{t_0}^t h dt'}, \quad x(t_0) = 0 \quad (13)$$

und

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 e^{\int_{t_0}^t \left( \gamma - \frac{i}{2} h \right) dt'} + r_1 e^{\int_{t_0}^t \left( \bar{\gamma} - \frac{i}{2} h \right) dt'} \\ &= r_0 e^{-i \int_{t_0}^t \frac{h}{1-x} dt'} + r_1 e^{i \int_{t_0}^t \frac{h \bar{x}}{1-x} dt'}. \end{aligned} \quad (14)$$

Die in (14) auftretenden Integrale kann man nicht allgemein ausrechnen; die wegen  $|x| \ll 1$  erlaubte Reihenentwicklung der Nenner liefert:

<sup>3</sup> H. KOPPE, Z. Naturforschg. **5 a**, 137 [1950].

<sup>4</sup> A. SCHOCH, Ergebn. exakt. Naturwiss. **23**, 127 [1950].

$$-i \int \frac{h}{1-x} dt = -i \int h dt - i \int h x dt - i \int h x^2 dt - \dots, \quad i \int \frac{h x}{1-x} dt = i \int h x dt + i \int h x^2 dt + \dots.$$

Aus DGl. (10) folgt

$$i \int_{t_0}^t h x dt' = x + \frac{1}{2} \log \frac{h}{h_0}$$

und für das quadratische Glied erhält man

$$\begin{aligned} i \int_{t_0}^t h x^2 dt &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{\dot{h}}{h} x dt' = \frac{x^2}{2} - \mathbf{k} \\ \text{mit } \mathbf{k}(t) &= -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{\dot{h}}{h} x dt' = \frac{1}{4} \int_{t_0}^t \left( \frac{\dot{h}}{h} \right)_{t'} e^{i \int_{t_0}^{t'} \frac{\dot{h}}{h} dt''} \left( \int_{t_0}^{t'} \left( \frac{\dot{h}}{h} \right)_{t''} e^{-i \int_{t_0}^{t''} \frac{\dot{h}}{h} dt'''} dt'' \right) dt'. \end{aligned}$$

Partielle Integration von  $\mathbf{k}$  liefert

$$\mathbf{k} + \bar{\mathbf{k}} = \mathbf{p} \bar{\mathbf{p}}.$$

Mit den Anfangsbedingungen  $r_0 = \varrho e^{i\psi}$  ( $\varrho, \psi = \text{reell, const}$ ) und  $r_1 = \text{reell, const}$  folgt mit  $\int_{t_0}^t h dt' = H(t)$ :

$$r(t) = \left( \frac{h}{h_0} \right)^{-\frac{1}{2}} [\varrho e^{-i(H-\psi)-x-(x^2/2)+\mathbf{k}} + r_1 e^{-\bar{x}-(\bar{x}^2/2)+\bar{\mathbf{k}}}].$$

Wir interessieren uns nun für den Endzustand mit  $h \neq h_0$  und  $\dot{h} \equiv 0$ . Dann ist

$$\dot{r} = \left( \frac{h}{h_0} \right)^{-\frac{1}{2}} [(-i h - \dot{x} - x \dot{\bar{x}}) \varrho e^{-i(H-\psi)-x-(x^2/2)+\mathbf{k}} + (-\dot{x} - x \dot{\bar{x}}) r_1 e^{-\bar{x}-(\bar{x}^2/2)+\bar{\mathbf{k}}}].$$

Die DGl. (10) geht jetzt über in  $\dot{x} - i h x = 0$ , daraus folgt  $(1+x) \dot{x}/i h = x + x^2$  und

$$\dot{r} = -i(h/h_0)^{1/2} [(1+x+x^2) \varrho e^{-i(H-\psi)-x-(x^2/2)+\mathbf{k}} + (x+\bar{x}^2) r_1 e^{-\bar{x}-(\bar{x}^2/2)+\bar{\mathbf{k}}}].$$

Wegen (2) ist  $\mu_0 = h_0 \varrho^2$ . Führt man noch  $\varepsilon = r_1/\varrho$  ein, so folgt:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = |(1+x+x^2) e^{-i(H-\psi)-x-(x^2/2)+\mathbf{k}} + \varepsilon (\bar{x}+\bar{x}^2) e^{-\bar{x}-(\bar{x}^2/2)+\bar{\mathbf{k}}}|^2.$$

Wenn man berücksichtigt, daß  $x = -\mathbf{p} e^{iH}$  und  $\mathbf{p} = p e^{i\chi}$  ( $p, \chi = \text{reell, const}$ ),  $p \ll 1$ ,  $\mathbf{k} + \bar{\mathbf{k}} = p^2$ , so folgt nach einigen elementaren, aber etwas umständlichen Rechnungen und Reihenentwicklungen nach  $p$  (wobei die Glieder bis zur Ordnung  $p^2$  einschließlich mitgenommen werden)

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + 2 \varepsilon p \cos(\psi + \chi) + (1 + \varepsilon^2) p^2. \quad (15)$$

Das Integral  $\mathbf{p}$  ist von  $t_0$  bis  $t_1$  zu erstrecken.

Betrachtet man ein System von vielen Teilchen mit gleichmäßig über alle Winkel verteilten Phasen  $\psi$ , so liefert die Mittelung des  $\cos \psi$  über  $0 < \psi < 2\pi$  eine mittlere Änderung des magnetischen Momentes von

$$\left\langle \frac{\mu}{\mu_0} \right\rangle = 1 + (1 + \varepsilon^2) p^2. \quad (16)$$

Wie man sieht, wird  $\left\langle \frac{\mu}{\mu_0} \right\rangle - 1$  eine Größenordnung kleiner als  $\left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right)_{\varepsilon=0}$ .

Um die Änderung des magnetischen Momentes zu kennen, muß man also nur das Integral  $\mathbf{p}$  berechnen.

## 5. Die Berechnung von $\mathbf{p}$

Das Integral (12) wird über ein Intervall  $[t_0, t_1]$  erstreckt, in dem  $\dot{h} \neq 0$ . Außerhalb soll  $\dot{h} \equiv 0$  sein. Man kann dann die Integralgrenzen auch bis  $\pm \infty$  schieben:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\dot{h}}{h} \right)_t e^{-i \int_0^t \frac{\dot{h}}{h} dt'} dt.$$

(Da für  $t \rightarrow -\infty$  die Phase in der Exponentialfunktion unbestimmt wird, wird die untere Grenze  $t' = 0$  gesetzt.)  $\dot{h}/h$  ist eine im Vergleich zu  $\exp[-i \int_0^t \dot{h}/h dt']$  langsam veränderliche Funktion. Das Integral ist vom Typ der FOURIER-Transformation.

Im einfachsten Fall hat  $\dot{h}$  ein Maximum und geht beiderseits dieses Maximums gegen Null, z. B. wie eine Glockenkurve. Je kleiner  $\dot{h}/h^2$  gegen 1, desto breiter wird die Kurve, wenn man einen bestimmten

Feldanstieg erreichen will (d. h.  $\int_{t_0}^{t_1} \frac{\dot{h}}{h} dt = \log \frac{h_1}{h_0} = \text{const}$ ). Dann wird aber auch die Zahl der Schwingungen der Exponentialfunktion über der Funktion  $\dot{h}/h$  größer und der Integralwert kleiner.

Betrachten wir allgemein eine Funktion  $h(t)$  vom Typ der Abb. 1. Durch die Transformation  $t \rightarrow \alpha t$

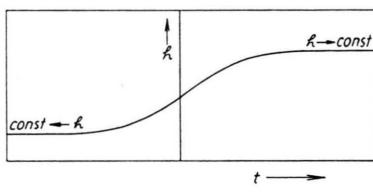


Abb. 1. Der in den vorliegenden Rechnungen benutzte Funktionstyp für  $h(t)$ .

kann man den Anstieg durch geeignete Wahl von  $\alpha$  beliebig flach oder steil machen. Für diese Funktion  $h_\alpha(t) = h(\alpha t)$  lautet das Integral

$$\mathbf{p}(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h(\alpha t)} \frac{dh(\alpha t)}{dt} e^{-i \int_0^t h(\alpha t') dt'} dt$$

oder, wenn man  $\tau = \alpha t$  setzt:

$$\mathbf{p}(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h(\tau)} \frac{dh(\tau)}{d\tau} e^{-\frac{i}{\alpha} \int_0^\tau h(\tau') d\tau'} d\tau. \quad (17)$$

Durch Einführung der neuen Variablen

$$u = \int_0^\tau h(\tau') d\tau'$$

(wegen  $du/d\tau > 0$  ist dies immer möglich) erhält man aus (17)

$$\mathbf{p}(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-(i/\alpha) u} du,$$

wo

$$f(u) = \left( \frac{1}{h^2(\tau)} \frac{dh(\tau)}{d\tau} \right)_{\tau(u)}.$$

Unter folgenden Voraussetzungen über  $f(u)$  lässt sich  $\mathbf{p}(\alpha)$  bestimmen: Es sei  $f(u + i w)$  in einer Umgebung  $|w| < \eta_0$  der  $u$ -Achse analytisch und integrierbar. Dann existiert der Integralwert und verschwindet für  $\alpha \rightarrow 0$ . Durch die Transformation  $u \rightarrow u - i \eta$ , ( $0 < \eta < \eta_0$ ,  $\eta = \text{const}$ ) wird der Integrationsweg parallel verschoben. Dann wird

$$|\mathbf{p}(\alpha)| = \frac{1}{2} e^{-(\eta/\alpha)} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(u - i \eta) e^{-(i/\alpha) u} du \right| \leq e^{-\eta/\alpha} M, \quad (18)$$

wenn  $2M$  die obere Schranke des Integrals in (19) ist. Für  $\alpha \rightarrow 0$  gilt  $M \rightarrow 0$ . (Wählt man  $\eta < 0$ , so existiert der Grenzwert von  $\mathbf{p}(\alpha)$  bei  $\alpha \rightarrow 0$  nicht.)  $\mathbf{p}(\alpha)$  geht also bei  $\alpha \rightarrow 0$  mindestens exponentiell gegen Null.

$\alpha/\eta$  ist im wesentlichen das Verhältnis der relativen Feldänderungsgeschwindigkeit zur Gyrofrequenz. Einsetzen in (15) zeigt, daß die relative Änderung von  $\mu$  mindestens exponentiell gegen Null strebt, wenn  $\alpha/\eta \rightarrow 0$ .

Wir wollen nun eine speziellere Form der Funktion  $h(t)$  annehmen, und zwar

$$h(t) = h_0 \left( \frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2} \Im g(\alpha t) \right). \quad (19)$$

Für  $t \rightarrow -\infty$  geht  $h(t)$  exponentiell gegen  $h_0 = \text{const}$ , so daß  $\dot{h}, \ddot{h}, \dots \rightarrow 0$ . Für  $t \rightarrow +\infty$  gilt ähnlich  $h \rightarrow n h_0 = \text{const}$ . Die Steilheit des Anstiegs ist proportional zu  $\alpha$ . Für  $\alpha \ll h_0$  wird  $h(0)/h^2(0) \ll 1$ . Im Integral (12) setzen wir  $\tau = \alpha t$  und integrieren im Intervall  $-\infty < \tau < +\infty$ . Die beiden Grenzen entsprechen dem Übergang  $\dot{h} \rightarrow \dot{h} \equiv 0$ . Aus (12) wird dann ein Integral von der Form (17). Die Substitution

$$y = \frac{1}{h_0} \int_0^\tau h d\tau' = \frac{n+1}{2} \tau + \frac{n-1}{2} \log \Im g(\tau)$$

führt dann auf das Integral

$$\mathbf{p} \left( \frac{h_0}{\alpha} \right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(y) e^{-i(h_0/\alpha) y} dy, \text{ mit } F(y) = \left( \frac{1}{h^2} \frac{dh}{d\tau} \right).$$

Bei der Transformation  $\tau \rightarrow y$  hat man die Gleichung

$$(e^{2\tau/(n-1)})^n + e^{2\tau/(n-1)} - 2 e^{2y/(n-1)} = 0$$

zu lösen. Im Falle  $n = 2$ , der auch den numerischen Rechnungen zugrunde liegt, ist dies besonders einfach. Man erhält

$$F(y) = \frac{(1+8 e^{2y})^{1/2} - 1}{1+8 e^{2y}}$$

und

$$\mathbf{p}(\alpha) = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-\frac{\pi}{2} \frac{h_0}{\alpha}}}{1 - e^{-\pi \frac{h_0}{\alpha}}} \cdot \left[ 1 - \pi^{-1/2} \frac{\Gamma \left( \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \frac{h_0}{\alpha} \right)}{\Gamma \left( 1 + \frac{i}{2} \frac{h_0}{\alpha} \right)} \right] e^{\frac{i}{2} \left( \frac{h_0}{\alpha} \log 8 + \pi \right)}.$$

Abb. 2 zeigt die Kurve  $p^2$  als Funktion von  $\alpha/h_0$  (bezeichnet mit A). Man erhält also einen exponentiellen Abfall für  $\alpha \rightarrow 0$ . Der Faktor im Exponenten ist gleich dem Abstand der nächsten Singularität von  $F(y + iw)$  zur  $y$ -Achse.

## 6. Die numerischen Rechnungen\*

Mit  $h(t)$  nach Gl. (19) für  $n = 2$  wurde die exakte Bewegungsgleichung für eine Reihe von Parametern  $\alpha/h_0$ ,  $\varepsilon$  und  $\psi$  numerisch gelöst, und zwar in der Form (3).  $r$  gewinnt man nach Gl. (6). Die Ergebnisse sind in den Abb. 2 bis 4 angegeben.

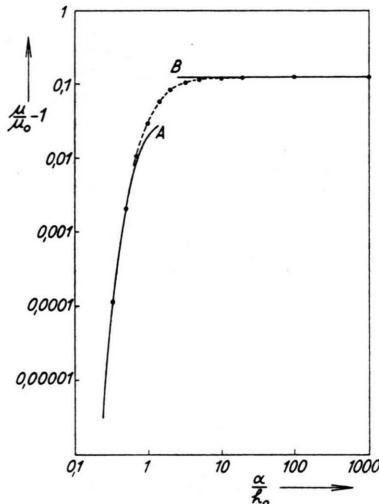


Abb. 2. Abhängigkeit der Änderung des magnetischen Momentes von der Schnelligkeit der Feldänderung  $\alpha/h_0$ .  $\varepsilon = 0$ . ● numerisch berechnete Werte.

$\alpha = 0$  ist die Grenze zwischen langsamer und schneller Feldänderung. Bemerkenswert ist, daß für  $\alpha < h_0$  die Änderung des magnetischen Momentes sehr schnell klein wird.

Abb. 2 zeigt  $(\mu/\mu_0) - 1$  als Funktion von  $\alpha/h_0$  mit  $\varepsilon = 0$ . A ist die nach Abschnitt 5 bestimmte

\* Die numerischen Rechnungen wurden auf der Göttinger Elektronischen Rechenmaschine G 2 durchgeführt.

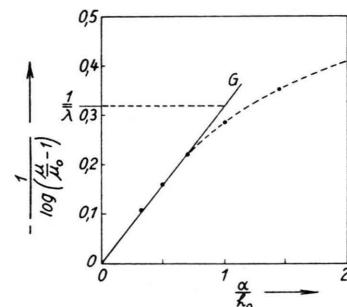


Abb. 3.  $-1/\log[(\mu/\mu_0) - 1]$  als Funktion von  $\alpha/h_0$ . G ist eine Gerade mit der Steigung  $1/\pi$ .  $\varepsilon = 0$ . ● numerisch berechnete Werte.

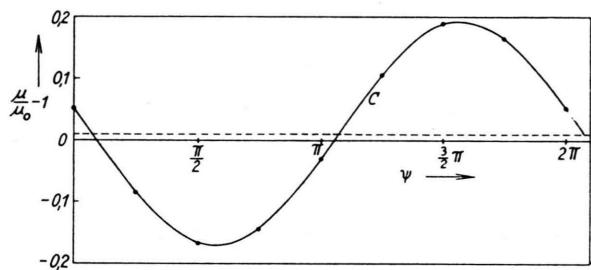


Abb. 4. Die Änderung von  $\mu$  in Abhängigkeit von der Anfangs  $\psi$ .  $\varepsilon = 2$ . ● numerisch gerechnete Werte.

Kurve  $p^2$ . Die Gerade B ist der Grenzwert für schnelle Feldänderung, nach Gl. (8). In Abb. 3 ist  $-1/\log[(\mu/\mu_0) - 1]$  als Funktion von  $\alpha/h_0$  aufgetragen. Die Steigung für  $\alpha/h_0$  ist mit guter Näherung  $\pi^{-1}$ . Die Kurve C in Abb. 4 ist die mit der Näherungsmethode bestimmte, für  $\varepsilon = 2$  und  $\alpha/h_0 = 0,5$ . Die Anfangsphasen-Normierung wurde willkürlich so gewählt, daß die zwei Punkte mit kleinster Abszisse mit C zusammenfallen.

Zur Kontrolle wurde das Integral  $\mathbf{p}(t)$  numerisch bestimmt, und mit dessen Hilfe  $x(t)$  (für  $\alpha/h_0 = 0,5$ ). Es ergab sich, daß dauernd  $|x|^2 < 0,01$  war.

Wir danken Frau G. HAIN für ihre Mitwirkung bei den numerischen Rechnungen und Herrn Dr. K. HAIN für Diskussionen.